Examen 8 janvier 2007

Intégration et théorie de la mesure LM363

Durée 3 heures. Documents interdits

Exercice 1 Soit $f : [0,1] \mapsto [0,+\infty[$ borélienne et $A \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble :

$$A := \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1, \quad y^2 + z^2 \leq f(x)\}$$

1. Prouver que l'application

$$F : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad F(x,y,z) := y^2 + z^2 - f(x)$$

   est borélienne et en déduire que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.
2. Pour tout $x \in [0,1]$ déterminer la section $A_x := \{(y,z) : (x,y,z) \in A\}$. Vérifier que $A_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et calculer sa mesure de Lebesgue $\lambda_2(A_x)$.
3. Calculer le volume $\lambda_3(A)$ de A en fonction de f.
4. Calculer explicitement le volume de A si $f(x) = x^3$, $x \in [0,1]$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}_+ \mapsto [0,1]$ la fonction

$$f(x) := e^{-x}, \qquad x \geq 0.$$

1. Prouver que f est borélienne et que pour tout $s > 0$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f^s \, dx = \frac{1}{s}$. En déduire que

$$\frac{1}{1+t} = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx} f(x) \, dx, \qquad t \in [0,+\infty[.$$

2. Montrer par récurrence (avec un argument complet) que

$$\frac{d^k}{dt^k} \frac{1}{1+t} = (-1)^k \int_{\mathbb{R}_+} x^k e^{-tx} f(x) \, dx, \qquad \forall\, t \in [0,\infty[,\ k \in \mathbb{N}.$$

3. Calculer directement par récurrence $\displaystyle\frac{d^k}{dt^k} \frac{1}{1+t}$ et en déduire que

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} \, dx = k! \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

4. Prouver que pour toute $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ borélienne on a :

$$\int_0^\infty g(e^{-x})\, e^{-x}\, dx \;=\; \int_0^1 g(y)\, dy. \tag{2}$$

5. En déduire que :

$$\int_0^1 |\ln y|^k\, dy \;=\; k! \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Exercice 3 On considère ici l'espace mesuré $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.

1. Dire pour quels $p \in [1, +\infty]$ on a $f \in L^p$ et pour quels $p \in [1, +\infty]$ on a $f \notin L^p$ dans les cas :
   – pour $\alpha > 0$, $f(x) := x^{-\alpha}$, $x \in]0,1]$
   – $f(x) := \ln x$, $x \in]0,1]$ (on pourra utiliser la formule (3) ci-dessus).
2. Donner un exemple d'une suite $(g_k)_k$ telle que $g_k \in L^1$ pour tout k mais pour tout $p > 1$ il existe k tel que $g_k \notin L^p$.
3. Construire, à l'aide de la suite du point précédent, un exemple d'une $g \in L^1$ telle que $g \notin L^p$ pour tout $p > 1$.

Exercice 4 Soient f_n, f fonctions mesurables positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ avec $f \in L^1$. On suppose que :

$$f \leq \liminf_{n\to\infty} f_n \qquad \mu-\text{p.p.}, \qquad\qquad \limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu.$$

1. Prouver que
$$\int f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$
et en déduire que
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu.$$
2. Prouver que $\mu-$p.p. $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$.
3. Prouver que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $|a - b| = a + b - 2\min\{a, b\}$ et en déduire que $f_n \to f$ dans L^1 si $n \to \infty$.
4. Montrer que f_n ne converge pas nécessairement vers f $\mu-$p.p.

Correction

Solution de l'exercice 1

1. $F_1(x, y, z) = y^2 + z^2$ est continue et $F_2(x, y, z) = f(x)$ est borélienne donc $F = F_1 + F_2$ est borélienne et $A = F^{-1}(]-\infty, 0])$ est borélien.
2. Si $x \in [0, 1]$ alors $A_x = \{(y, z) : y^2 + z^2 \leq f(x)\}$ est un cercle fermé de centre $(0, 0)$ et rayon $\sqrt{f(x)} \geq 0$. Donc A_x est un fermé et $\lambda_2(A_x) = \pi f(x)$.
3. Par le théorème de Fubini, puisque $\lambda_3 = \lambda_1 \otimes \lambda_1 \otimes \lambda_1 = \lambda_1 \otimes \lambda_2$:

$$\lambda_3(A) = \int_0^1 \lambda_2(A_x)\, dx \;=\; \int_0^1 \pi f(x)\, dx \;=\; \pi \int_0^1 f\, dx.$$

4. Si $f(x) = x^3$:

$$\lambda_3(A) = \pi \int_0^1 x^3\, dx \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

Solution de l'exercice 2

1. f est continue donc borélienne. Pour tout $s > 0$:

$$\int f^s\, dx \;=\; \int_0^\infty e^{-sx}\, dx \;=\; \left[-\frac{1}{s}\, e^{-sx}\right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}.$$

2. On veut prouver par récurrence que

$$\frac{d^k}{dt^k}\, \varphi(t) \;=\; (-1)^k\, \frac{k!}{(1+t)^{k+1}}, \qquad \forall\, t \in [0, +\infty[,\; k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

   La formule (4) est vraie pour $k = 0$. Si (4) est vrai pour $k - 1$, alors

$$\frac{d^k}{dt^k}\, \varphi(t) \;=\; \frac{d}{dt}\, (-1)^{k-1}\, \frac{(k-1)!}{(1+t)^k} \;=\; (-1)^{k-1}\, (k-1)!\, (-k) \frac{1}{(1+t)^{k+1}}$$

   et (4) est vrai pour k. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, par le point 1

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx}\, f(x)\, dx \;=\; \int_0^\infty e^{-(1+t)x}\, dx \;=\; \frac{1}{1+t} \;=\; \varphi(t).$$

3. On pose maintenant $F : [0, \infty[^2 \mapsto \mathbb{R}$, $F(t, x) := e^{-x-tx}$. Il est clair que pour tout $x \geq 0$, $F(\cdot, x)$ est indéfiniment dérivable sur $[0, \infty[$ et que :

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\, F(t, x) \;=\; (-1)^k\, x^k\, e^{-x-tx}, \qquad \forall\, (t, x) \in [0, +\infty[^2,\; k \in \mathbb{N}.$$

Si on pose $g_k(x) := x^k\, e^{-x}\, 1_{[0,+\infty[}(x)$, on obtient l'estimation :

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\, F(t,\cdot)\right| \,\le\, g_k(\cdot), \qquad \int g_k\, d\lambda \,<\, +\infty.$$

Par le Théorème de dérivation sous le signe d'intégrale on obtient :

$$\frac{d^k}{dt^k}\,\varphi(t) \,=\, \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial t^k}\, F(t,x)\, dx \,=\, \int_0^\infty (-1)^k\, x^k\, e^{-x-tx}\, dx.$$

Si on pose $t = 0$ on trouve (1) grâce à (4).

4. Si on pose $\psi :]0,+\infty[\mapsto]0,1[$, $\psi(x) := e^{-x}$ alors ψ est un difféomorphisme et on trouve par le théorème de changement de variable :

$$\int_0^\infty g(e^{-x})\, e^{-x}\, dx \,=\, \int_0^\infty g(\psi(x))\, |\psi'(x)|\, dx \,=\, \int_0^1 g(y)\, dy \qquad (5)$$

pour toute $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ borélienne.

5. On peut choisir $g(y) = |\ln y|^k$, $y \in]0,1[$ dans (5) et trouver par (1) :

$$\int_0^1 |\ln y|^k\, dy \,=\, \int_0^\infty x^k\, e^{-x}\, dx \,=\, k! \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \qquad (6)$$

Solution de l'exercice 3 1. On rappelle que pour tout $\delta > 0$

$$\int_0^1 x^{-\delta}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\delta} & \text{si } \delta < 1 \\ +\infty & \text{si } \delta \ge 1. \end{cases}$$

Puisque $\lambda([0,1]) < +\infty$ on a que $L^p \subseteq L^r$ si $1 \le r \le p \le +\infty$.
Soit $f(x) := x^{-\alpha} \ge 0$, $x \in]0,1]$ avec $\alpha \in]0,1[$. Alors

$$\int_0^1 f^p\, dx = \int_0^1 x^{-p\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p\alpha} & \text{si } 1 \le p < \frac{1}{\alpha} \\ +\infty & \text{si } p \ge \frac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

Donc $f \in L^p$ pour tout $p \in [1, \frac{1}{\alpha}[$ et $f \notin L^p$ pour tout $p \ge \frac{1}{\alpha}$. Si $\alpha \ge 1$ alors

$$\int_0^1 f^p\, dx = \int_0^1 x^{-p\alpha} dx = +\infty, \qquad \forall\, p \ge 1$$

donc $f \notin L^p$ pour tout $p \ge 1$. En particulier pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$\|f\|_p = +\infty, \qquad \forall\, p \ge \frac{1}{\alpha} \vee 1.$$

Donc $\|f\|_\infty = \lim \|f\|_p = +\infty$ et $f \notin L^\infty$ pour tout $\alpha > 0$.
Soit maintenant $f(x) := \ln x$, $x \in]0,1]$. Par (3) on voit que h appartient à L^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque $L^p \subseteq L^r$ si $1 \le r \le p$, $f \in L^p$ pour tout $p \in [1, \infty[$. Mais $f \notin L^\infty$ car

$$\lambda(\{x : |\ln x| > M\}) = e^{-M} > 0, \qquad \forall M > 0,$$

donc $\{M > 0 : \lambda(\{x : |\ln x| > M\}) = 0\} = \emptyset$ et $\|f\|_\infty = +\infty$.

2. Par exemple pour tout $k \ge 1$:

$$g_k(x) := x^{-1+\frac{1}{k}} \ge 0, \quad x \in]0,1], \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 g_k \, dx = k. \tag{7}$$

Pour tout $p > 1$ il suffit de prendre $k > (1-\frac{1}{p})^{-1}$ pour avoir $p(1-\frac{1}{k}) > 1$ et donc :

$$\int_0^1 g_k^p \, dx = \int_0^1 x^{-p(1-\frac{1}{k})} \, dx = +\infty. \tag{8}$$

3. On peut définir :

$$g := \sum_k 2^{-k} g_k,$$

où les $(g_k)_k$ sont définies par (7), et voir que

$$\|g\|_1 \le \sum_k 2^{-k} \|g_k\|_1 = \sum_k 2^{-k} k < +\infty.$$

Pour tout $p > 1$ il existe $k > (1-\frac{1}{p})^{-1}$. Puisque $g_n \ge 0$ pour tout $n \ge 1$ on a $g \ge g_k$ et $g^p \ge g_k^p$, donc par (8) :

$$\int_0^1 g^p \, dx \ge \int_0^1 g_k^p \, dx = +\infty.$$

Solution de l'exercice 4

1. Puisque $f_n \ge 0$ le lemme de Fatou entraîne :

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Par hypothèse on a $f \le \liminf_n f_n$ et donc :

$$\int f \, d\mu \le \int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu. \tag{9}$$

Puisque $\liminf_n \int f_n\, d\mu \le \limsup_n \int f_n\, d\mu$ on obtient par la deuxième hypothèse :

$$\int f\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \le \limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \le \int f\, d\mu$$

donc toutes les inégalités sont des égalités et en particulier :

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu. \tag{10}$$

2. De (9) et (10) on obtient :

$$f \le \liminf_{n\to\infty} f_n \qquad \mu - \text{p.p.}, \qquad\qquad \int f\, d\mu = \int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$$

et donc μ−p.p. $f = \liminf_n f_n$.

3. Si $a \ge b$ on a $a + b - 2\min\{a, b\} = a + b - 2b = a - b = |a - b|$ et si $a \le b$ le même est vrai par symétrie. Donc :

$$\int |f_n - f|\, d\mu = \int f_n\, d\mu + \int f\, d\mu - 2\int \min\{f_n, f\} d\mu.$$

Or on a $\liminf_n \min\{f_n, f\} = \min\{\liminf_n f_n, f\} = f \quad \mu$−p.p. et encore par le lemme de Fatou :

$$\int f\, d\mu \le \liminf_n \int \min\{f_n, f\} d\mu.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu \\
&= \lim_n \int f_n\, d\mu + \int f\, d\mu - \liminf_{n\to\infty} 2 \int \min\{f_n, f\} d\mu \\
&\le 2\int f\, d\mu - 2\int f\, d\mu = 0.
\end{aligned}$$

Donc on a bien que $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0$.

4. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Il suffit de trouver une famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions positives et mesurables telle que $f_n \to 0$ dans L^1, $\liminf_n f_n = 0 \quad \mu$-p.p. mais $\limsup_n f_n > 0$ sur un ensemble de mesure positive. L'exemple standard d'une suite qui converge dans L^1 mais pas p.p. nous donne une telle famille :

$$f_{2^n+k} := 1_{[\frac{k}{2^n};\frac{k+1}{2^n}[}, \qquad \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\},\ n \in \mathbb{N},$$

car $\liminf_m f_m = 0$, $\lim_m \int f_m = 0$ et $\limsup_m f_m = 1$.